

第2讲 四边形中的动点问题

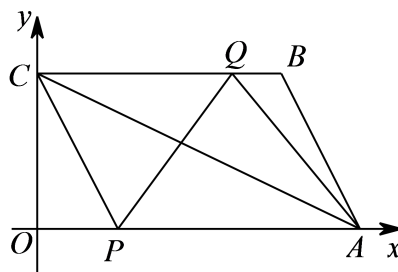
一、 四边形动点与存在性问题

【教法备注】

动点中的四边形存在性中，可以利用好题当中已知边的平行或相等的关系，通过方程解决问题

例题1

1. 如图，点 A 的坐标为 $(8, 0)$ ，点 B 的坐标为 $(6, 4)$ ，点 C 的坐标为 $(0, 4)$ ，点 P 从原点 O 出发，以每秒3的单位长度的速度沿 x 轴向右运动，点 Q 从点 B 出发，以每秒1的单位长度的速度沿线段 BC 向左运动， P, Q 两点同时出发，当点 Q 运动到点 C 时， P, Q 两点停止运动，设运动时间为 t (秒)。



- (1) 当 $t = \underline{\hspace{2cm}}$ 时，四边形 $OPQC$ 为矩形。
- (2) 当 $t = \underline{\hspace{2cm}}$ 时，线段 PQ 平分四边形 $OABC$ 的面积。
- (3) 在整个运动过程中，当以 A, C, P, Q 为顶点的四边形为平行四边形时，求该平行四边形的面积。

【答案】(1) $\frac{3}{2}s$

(2) $\frac{1}{2}s$

(3) 20或10。

【解析】(1) 如图，由题意得： $OP = 3t$ ， $BQ = t$ ， $CQ = 6 - t$ ，

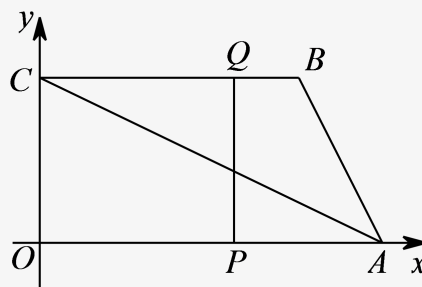
$\because B(6, 4), C(0, 4)$ ，

$\therefore BC \parallel x$ 轴，即 $BC \parallel OP$ ，

$\therefore \angle COP = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 当 $CQ = OP$ 时，四边形 $OPQC$ 为矩形，

则 $6 - t = 3t$ ，



$$t = \frac{3}{2},$$

故答案为： $\frac{3}{2}$ s.

(2) 如图,

$\because BC \parallel OA$, 且 AB 与 OC 不平行,

$\therefore$ 四边形 $OABC$ 为梯形,

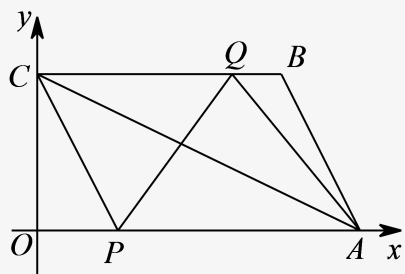
若线段 PQ 平分四边形 $OABC$ 的面积,

则有: $OP + CQ = BQ + AP$,

$$3t + 6 - t = t + 8 - 3t,$$

$$t = \frac{1}{2},$$

故答案为: $\frac{1}{2}$ s.



(3) ①如图, $\because CQ \parallel AP$,

$\therefore$ 当 $CQ = AP$ 时, 四边形 $CPAQ$ 为平行四边形,

$$\text{即: } 6 - t = 8 - 3t,$$

$$t = 1,$$

$\therefore S_{\text{平行四边形CPAQ}}$

$$= AP \cdot OC = (8 - 3t) \times 4 = (8 - 3) \times 4 = 20.$$

②如图, 当 $CQ = AP$ 时, 四边形 $CAPQ$ 为平行四边形,

$$6 - t = 3t - 8,$$

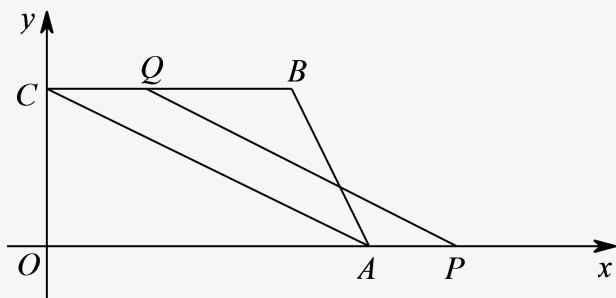
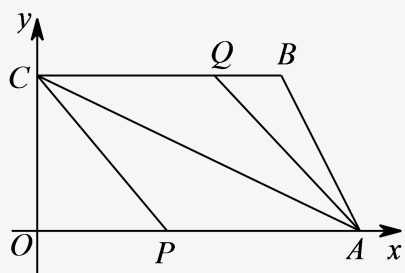
$$t = \frac{7}{2},$$

$\therefore S_{\text{平行四边形CAPQ}}$

$$= AP \cdot OC = (3t - 8) \times 4 = (3 \times \frac{7}{2} - 8) \times 4 = 10.$$

综上所述: ①当 $t = 1$ s 时, $S_{\text{平行四边形CPAQ}} = 20$.

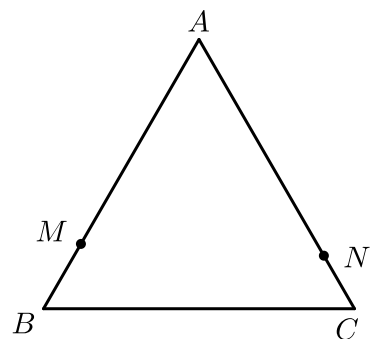
②当 $t = \frac{7}{2}$ s 时, $S_{\text{平行四边形CAPQ}} = 10$.



【标注】【知识点】动点与平行四边形问题

练习1

2. 如图, 等边 $\triangle ABC$ 的边长为 8, 动点 M 从点 B 出发, 沿 $B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B$ 的方向以每秒 3 个单位长度的速度运动, 动点 N 从点 C 出发, 沿 $C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ 的方向以每秒 2 个单位长度的速度运动.



- (1) 若动点 M 、 N 同时出发，经过几秒第一次相遇？
- (2) 若动点 M 、 N 同时出发，且其中一点到达终点时，另一点即停止运动．在 $\triangle ABC$ 的边上是否存在一点 D ，使得以点 A 、 M 、 N 、 D 为顶点的四边形为平行四边形？若存在，求此时运动的时间 t 及点 D 的具体位置；若不存在，请说明理由．

【答案】(1) $\frac{16}{5}$ 秒．

(2) 当 $t = \frac{8}{5}$ 或 $\frac{24}{5}$ 时，在 $\triangle ABC$ 的边上存在一点 D ，使得以点 A 、 M 、 N 、 D 为顶点的四边形为平行四边形，此时点 D 在 BC 上，且 $BD = \frac{24}{5}$ 或 $\frac{32}{5}$ ．

【解析】(1) 由题意得： $3t + 2t = 16$ ，解得： $t = \frac{16}{5}$ ．

(2) ① 当 $0 \leq t \leq \frac{8}{3}$ 时，点 M 、 N 、 D 的位置如图1所示：

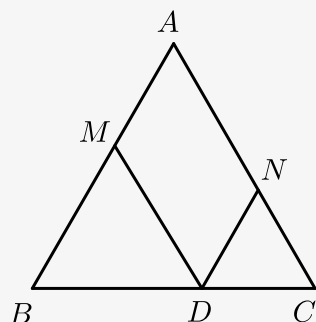


图 1

$\because$ 四边形 $ANDM$ 为平行四边形，
 $\therefore DN = AM$ ， $DN \parallel AM$ ，
 $\therefore \angle NDC = \angle ABC = 60^\circ$ ，
 $\because \triangle ABC$ 为等边三角形，
 $\therefore \angle C = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle NDC = \angle C$ ，
 $\therefore ND = NC$ ，
 $\therefore NC + BM = AM + BM = 8$ ，
 即： $3t + 2t = 8$ ， $t = \frac{8}{5}$ ，

此时点 D 在 BC 上, 且 $BD = \frac{24}{5}$ (或 $CD = \frac{16}{5}$) ;

②当 $\frac{8}{3} < t \leq 4$ 时, 此时 A 、 M 、 N 三点在同一直线上, 不能构成平行四边形;

③ $4 < t \leq \frac{16}{3}$ 时, 点从 M 、 N 、 D 的位置如图2所示:

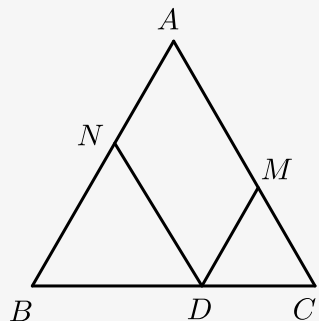


图 2

$\because$ 四边形 $ANDM$ 为平行四边形,

$\therefore DN = AM, AM \parallel DN$,

$\therefore \angle NDB = \angle ACB = 60^\circ$,

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$\therefore \angle B = 60^\circ$,

$\therefore \angle NDB = \angle B$,

$\therefore ND = NB$,

$\therefore NB + MC = AM + CM = 8$, $3t - 8 + 2t - 8 = 8$, 解得: $t = \frac{24}{5}$,

此时点 D 在 BC 上, 且 $BD = \frac{32}{5}$ (或 $CD = \frac{8}{5}$) ;

④当 $\frac{16}{3} < t \leq 8$ 时, 点 M 、 N 、 D 的位置如图3所示:

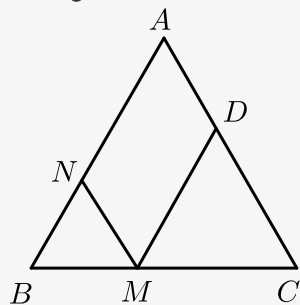


图 3

则 $BN = 16 - 2t$, $BM = 24 - 3t$,

由题意可知: $\triangle BNM$ 为等边三角形,

$\therefore BN = BM$, 即: $2t - 8 = 3t - 16$, 解得 $t = 8$,

此时 M 、 N 重合, 不能构成平行四边形.

$\therefore$ 综上所述, 当 $t = \frac{8}{5}$ 或 $\frac{24}{5}$ 时, 在 $\triangle ABC$ 的边上存在一点 D , 使得以点 A 、 M 、

N 、 D 为顶点的四边形为平行四边形, 此时点 D 在 BC 上, 且 $BD = \frac{24}{5}$ 或 $\frac{32}{5}$.

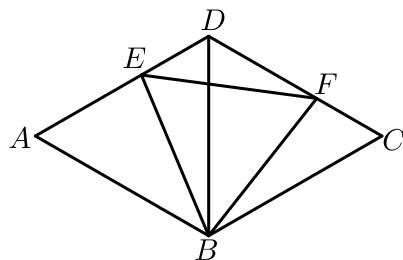
二、 四边形动点之最值问题

【教法备注】

这部分内容会涉及到线段最值以及面积最值问题。线段最值问题中可以考虑利用“垂线段最短”求解；面积最值问题需要转化为线段最值求解

|| 例题2

3. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为2， $BD = 2$ ， E 、 F 分别是边 AD 、 CD 上的两个动点，且满足 $AE + CF = 2$ 。



- (1) 求证： $\triangle BDE \cong \triangle BCF$ 。
- (2) 判断 $\triangle BEF$ 的形状，并说明理由。
- (3) 试探究 $\triangle DEF$ 的周长是否存在最小值，如果不存在，请说明理由；如果存在，请计算出 $\triangle DEF$ 周长的最小值。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) $\triangle BEF$ 是等边三角形。

(3) 存在，最小值为 $2 + \sqrt{3}$ 。

【解析】(1) $\because$ 菱形 $ABCD$ 的边长为2， $BD = 2$ ，

$$\therefore AB = AD = BD = 2, BC = CD = BD = 2,$$

$\therefore \triangle ABD$ 、 $\triangle BCD$ 都是等边三角形，

$$\angle BDE = \angle C = 60^\circ,$$

$$DE = AD - AE = 2 - AE = CF,$$

$$\therefore \triangle BDE \cong \triangle BCF.$$

(2) 由(1)知 $\triangle BDE \cong \triangle BCF$ ，

$$\therefore BE = BF, \angle CBE = \angle CBF,$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \angle EBF &= \angle DBE + \angle DBF \\
 &= \angle CBF + \angle DBF \\
 &= \angle DBC \\
 &= 60^\circ,
 \end{aligned}$$

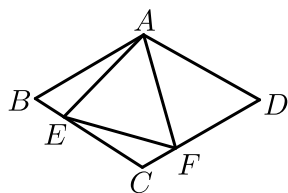
所以 $\triangle BEF$ 是等边三角形.

- (3) 当 $BE \perp AD$ 时, $\triangle DEF$ 周长最小,
 由(1)知 $\triangle BDE \cong \triangle BCF$,
 $\therefore DE = FC$,
 $\therefore DE + DF = AD = 2$,
 $\therefore$ 当 EF 取得最小值时, $\triangle DEF$ 周长最小,
 $\because \triangle BEF$ 是等边三角形,
 $\therefore$ 当 $BE \perp AD$ 时, 等边 $\triangle BEF$ 的边长最小,
 此时 $AE = \frac{1}{2}AB = 1$,
 $\therefore EF = BE = \sqrt{3}$,
 $\therefore$ 最小值为: $2 + \sqrt{3}$.

【标注】【知识点】菱形与全等综合

练习2

4. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $\angle BAD = 120^\circ$, $\triangle AEF$ 为正三角形, 点 E 、 F 分别在菱形的边 BC 、 CD 上滑动, 且 EF 不与 B 、 C 、 D 重合.



- (1) 证明: 不论 E 、 F 在 BC 、 CD 上如何滑动, 总有 $BE = CF$.
 (2) 当点 E 、 F 在 BC 、 CD 上滑动时, 分别探讨四边形 $AECF$ 和 $\triangle CEF$ 的面积是否发生变化?
 如果不变, 求出这个定值; 如果变化, 求出最大(或最小)值.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $S_{\text{四边形}AECF} = 4\sqrt{3}$ 为定值; $S_{\triangle CEF}$ 的面积发生变化, 其最大值为 $\sqrt{3}$.

【解析】(1) 连接 AC , 如下图所示,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD = 120^\circ$,

$$\angle 1 + \angle EAC = 60^\circ, \angle 3 + \angle EAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

$$\because \angle BAD = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 为等边三角形,

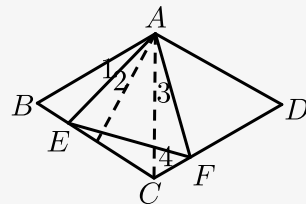
$$\therefore \angle 4 = 60^\circ, AC = AB,$$

$\therefore$ 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 中,

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 3 \\ AB = AC \\ \angle ABC = \angle 4 \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF$ (ASA).

$$\therefore BE = CF.$$



(2) 四边形 $AECF$ 的面积不变, $\triangle CEF$ 的面积发生变化.

理由: 由 (1) 得 $\triangle ABE \cong \triangle ACF$,

$$\text{则 } S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ACF},$$

故 $S_{\text{四边形 } AECF}$

$$= S_{\triangle AEC} + S_{\triangle ACF}$$

$$= S_{\triangle AEC} + S_{\triangle ABE}$$

$$= S_{\triangle ABC}, \text{ 是定值,}$$

作 $AH \perp BC$ 于 H 点, 则 $BH = 2$,

$$S_{\text{四边形 } AECF} = S_{\triangle ABC}$$

$$= \frac{1}{2} BC \cdot AH$$

$$= \frac{1}{2} BC \cdot \sqrt{AB^2 - BH^2}$$

$$= 4\sqrt{3},$$

由“垂线段最短”可知: 当正三角形 AEF 的边 AE 与 BC 垂直时, 边 AE 最短.

故 $\triangle AEF$ 的面积会随着 AE 的变化而变化, 且当 AE 最短时, 正三角形 AEF 的面积会最小,

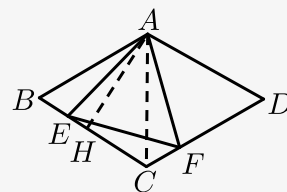
又 $S_{\triangle CEF} = S_{\text{四边形 } AECF} - S_{\triangle AEF}$, 则此时 $\triangle CEF$ 的面积就会最大.

$$\therefore S_{\triangle CEF} = S_{\text{四边形 } AECF} - S_{\triangle AEF}$$

$$= 4\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{3}.$$

答: 最大值是 $\sqrt{3}$.



【标注】【知识点】菱形与全等综合

三、 四边形动点中之线段问题

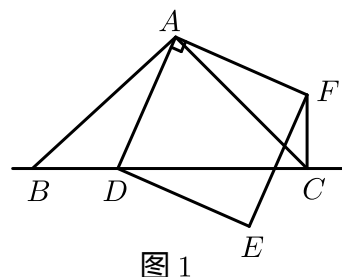
|| 例题3

5. 某数学兴趣小组在数学课外活动中，研究三角形和正方形的性质时，做了如下探究：

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， D 为直线 BC 上一动点（点 D 不与点 B ， C 重合），以 AD 为边在 AD 右侧作正方形 $ADEF$ ，连接 CF 。

（1）观察猜想。

如图1，当点 D 在线段 BC 上时。

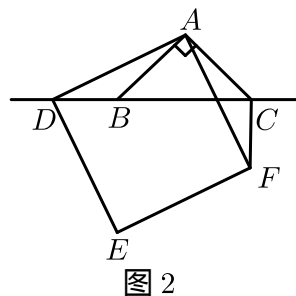


① BC 与 CF 的位置关系为：_____。

② BC ， CD ， CF 之间的数量关系为：_____。（将结论直接写在横线上）

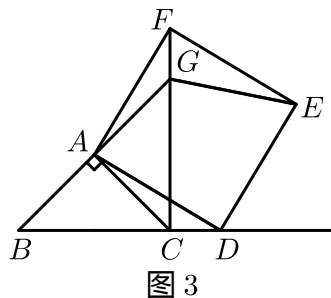
（2）数学思考。

如图2，当点 D 在线段 CB 的延长线上时，结论①，②是否仍然成立？若成立，请给予证明；若不成立，请你写出正确结论再给予证明。



（3）拓展延伸。

如图3，当点 D 在线段 BC 的延长线上时，延长 BA 交 CF 于点 G ，连接 GE ，若已知 $AB = 2\sqrt{2}$ ， $CD = \frac{1}{4}BC$ ，请求出 GE 的长。



【答案】(1)① $BC \perp CF$

$$\textcircled{2} \quad BC = CF + CD$$

(2) 结论①成立, 结论②不成立, 正确结论为 $BC = CD - CF$.

$$(3) \quad \sqrt{10}.$$

【解析】(1)① $\because$ 四边形 $ADEF$ 为正方形,

$$\therefore AD = AF, \angle DAF = 90^\circ,$$

$$\because AB = AC, \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAF,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACF = 45^\circ, CF = BD,$$

$$\because \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BCF = 90^\circ, BC \perp CF.$$

$$\textcircled{2} \quad \text{由} \textcircled{1} \text{得}, CF = BD,$$

$$\therefore BC = BD + CD = CF + CD.$$

(2) 结论①成立, 结论②不成立, 正确结论为 $BC = CD - CF$.

证明: $\because$ 四边形 $ADEF$ 为正方形,

$$\therefore AD = AF, \angle DAF = 90^\circ,$$

$$\because AB = AC, \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle FAC,$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle AFC (\text{SAS}),$$

$$\therefore BD = CF, \angle DBA = \angle FCA,$$

$$\because \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACF = \angle ABD = 135^\circ,$$

$$\because AB = AC, \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DCF = 90^\circ, CD = BD + BC = CF + BC,$$

$$\therefore BC \perp CF, BC = CD - CF.$$

(3) $\because$ 四边形 $ADEF$ 为正方形,

$$\therefore AD = AF, \angle DAF = 90^\circ,$$

$$\because AB = AC, \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAF,$$

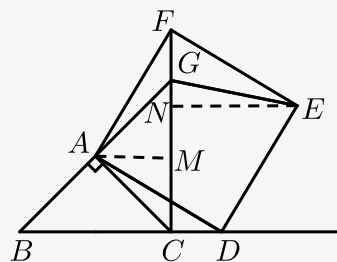
$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACF (\text{SAS}),$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle ACF = \angle ABC = 45^\circ, \\
&\therefore \angle BCF = \angle ACB + \angle ACF = 90^\circ, \\
&\therefore \angle ABC = 45^\circ, \\
&\therefore \triangle BCG \text{ 为等腰直角三角形}, \\
&\therefore CA \perp BG, AB = 2\sqrt{2}, \\
&\therefore AC = AG = AB = 2\sqrt{2}, \\
&\therefore BC = 4, \\
&\therefore CD = \frac{1}{4}BC, \\
&\therefore CD = 1.
\end{aligned}$$

如图，过点A作AM⊥CF于点M，

$$\begin{aligned}
&\therefore A \text{ 为 } BG \text{ 中点}, \\
&\therefore AM = \frac{1}{2}BC = 2, GM = \frac{1}{2}GC = 2, \\
&\therefore AC = AG, AD = AF, \angle FAG = \angle DAC, \\
&\therefore \triangle ACD \cong \triangle AGF (\text{SAS}), \\
&\therefore GF = CD = 1, FM = FG + GM = 1 + 2 = 3, \\
&\text{在 Rt}\triangle AMF \text{ 中}, AF^2 = AM^2 + MF^2 = 2^2 + 3^2 = 13, \\
&\text{过点 } E \text{ 作 } EN \perp CF,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore EF = AF, \angle AFE = \angle AMF = 90^\circ, \\
&\angle EFN + \angle AFM = 90^\circ, \\
&\angle AFM + \angle FAM = 90^\circ, \\
&\therefore \angle FAM = \angle EFN, \\
&\therefore \triangle EFN \cong \triangle FAM (\text{AAS}), \\
&\therefore FN = AM = 2, \\
&\therefore GN = 1, EN = FM = 3, \\
&\text{在 Rt}\triangle EGN \text{ 中}, EG^2 = EN^2 + GN^2 = 10, \\
&\therefore EG = \sqrt{10}.
\end{aligned}$$



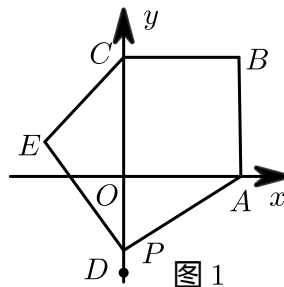
【标注】【知识点】正方形与全等综合

练习3

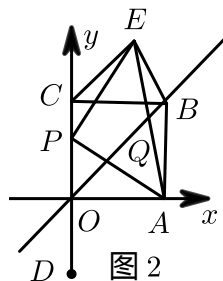
6. 在平面直角坐标系中，边长为4的正方形OABC的边OA落在x轴的正半轴上，边OC落在y轴的正半轴上，点C关于x轴的对称点为点D，点P从点D出发，以每秒1个单位的速度，沿着射线DC的方向

运动，运动时间为 t ($t > 0$ ，且 $t \neq 4$) 连接 PA ， PA 绕着点 P 逆时针方向旋转 90° 得到 PE ，连接 CE 。

(1) 如图1，当 $0 < t < 4$ 时，求 $\angle DCE$ 的度数。



(2) 如图2，连接 AE ，交 OB 于 Q ，若 $4 < t < 8$ ，求证： $\sqrt{2}OA = CE + 2BQ$ 。



(3) 连接 AE ，交直线 OB 于 Q ，若 $BQ = 1$ ，请直接写出 t 的值。

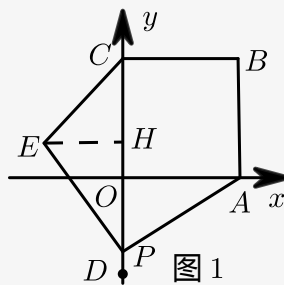
【答案】 (1) 45° 。

(2) 证明见解析。

(3) $(8 - \sqrt{2})s$ 或 $(8 + \sqrt{2})s$ 。

【解析】 (1) 如图1中，作 $EH \perp OC$ 于 H 。

$\because$ 四边形 $OABC$ 是正方形，
 $\therefore OA = OC$ ，
 $\because \angle AOP = \angle APE = \angle EHP = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle APO + \angle OAP = 90^\circ$ ，
 $\angle APO + \angle EPH = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle OAP = \angle EPH$ ，
 $\therefore \triangle EHP \cong \triangle POA$ ，
 $\therefore EH = OP$ ， $PH = OA = OC$ ，
 $\therefore OP = CH$ ，
 $\therefore EH = CH$ ，
 $\therefore \angle DCE = 45^\circ$ 。



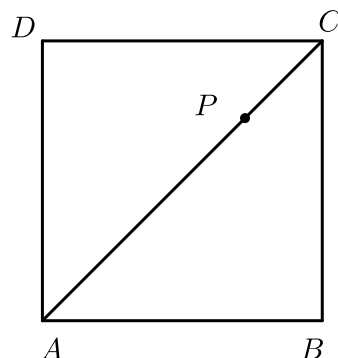
(2) 如图2中，作 $EF \perp y$ 轴于 F ，作 $EM \parallel OC$ 交 OB 于 M 。

$\because \angle EFP = \angle AOP = \angle APE = 90^\circ$ ，

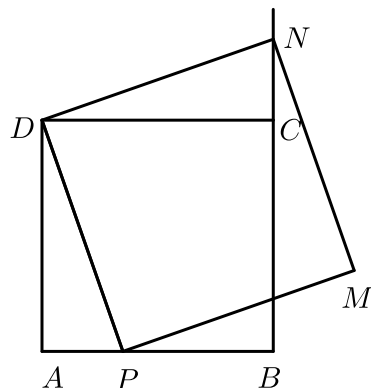
四、 四边形动点之路径问题

例题3

7. 已知：如图，正方形 $ABCD$ 。



- (1) 若点 P 是对角线 AC 上的一个动点，请证明 $PD = PB$ 。
(2) 若点 P 是边 AB 上的一个动点，以 DP 为边在 AB 同侧作正方形 $DPMN$ 。



- ① 试说明 N 点一定在 BC 的延长线上。
② 若正方形 $ABCD$ 的边长为3，当点 P 在 AB 边上由点 A 运动至点 B 时，点 M 随之运动，求点 M 的运动路径长。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) ① 证明见解析。

② $3\sqrt{2}$ 。

【解析】(1) 如图1，连接 PD ， PB ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

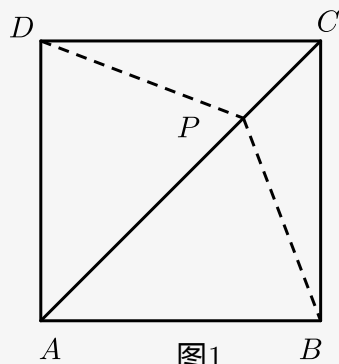
$\therefore AD = AB$ ， $\angle DAC = \angle BAC$ ，

在 $\triangle DAP$ 与 $\triangle BAP$ 中，

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle DAP = \angle BAP, \\ AP = AP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DAP \cong \triangle BAP,$$

$$\therefore PD = PB.$$



(2) ① $\because$ 四边形 $ABCD$ 和 四边形 $DPMN$ 是正方形 ,

$$\therefore AD = CD, PD = DN, \angle ADC = \angle PDN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADP = \angle CDN,$$

在 $\triangle ADP$ 与 $\triangle CDN$ 中 ,

$$\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADP = \angle CDN, \\ PD = DN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADP \cong \triangle CDN,$$

$$\therefore \angle DCN = \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCN = \angle BCD + \angle DCN = 180^\circ,$$

$\therefore$ N 点一定在 BC 的延长线上 .

② 如图2 , 连接 BM , 过 M 作 $MH \perp BC$ 于 H ,

$$\therefore \angle DNC + \angle MNH = \angle MNH + \angle NMH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DNC = \angle NMH,$$

在 $\triangle CDN$ 与 $\triangle HNM$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle DNC = \angle HNM \\ \angle DCN = \angle NHM, \\ CD = HN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DCN \cong \triangle NHM,$$

$$\therefore CD = NH, CN = HM,$$

$$\therefore BC = HN,$$

$$\therefore CN = BH,$$

$$\therefore HM = BH,$$

$$\therefore \angle MBH = 45^\circ,$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的运动路径长} = BD = 3\sqrt{2}.$$

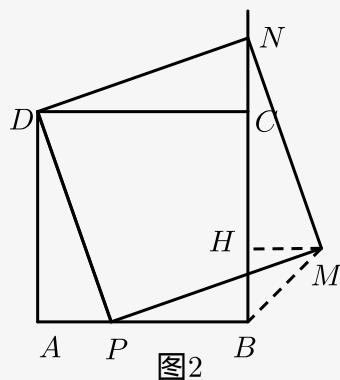


图2

【标注】【知识点】动点与特殊平行四边形问题

练习4

8. 如图1，在平面直角坐标系中，正方形 $ABCO$ 的顶点 C 、 A 分别在 x 、 y 轴上， $A(0,6)$ 、 $E(0,2)$ ，点 H 、 F 分别在边 AB 、 OC 上，以 H 、 E 、 F 为顶点作菱形 $EFGH$ 。

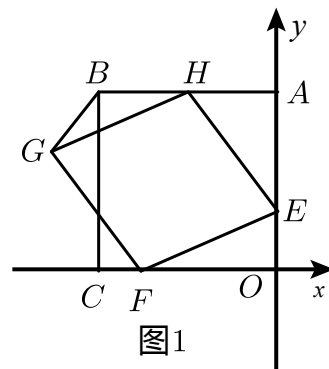


图1

- (1) 当 $H(-2,6)$ 时，求证：四边形 $EFGH$ 为正方形。
- (2) 若 $F(-5,0)$ ，求点 G 的坐标。
- (3) 如图2，点 Q 为对角线 BO 上一动点， D 为边 OA 上一点， $DQ \perp CQ$ ，点 Q 从点 B 出发，沿 BO 方向移动。若移动的路径长为3，直接写出 CD 的中点 M 移动的路径长为_____。

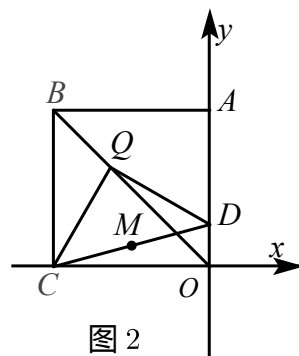


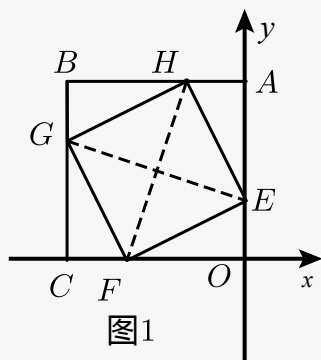
图2

【答案】(1) 证明见解析。

(2) $G(-5 - \sqrt{13}, 4)$ 。

$$(3) \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

【解析】(1) 如图1中,



$$\because E(0,2), H(-2,4),$$

$$\therefore OE = AH = 2,$$

$\because$ 四边形 $ABCO$ 是正方形,

$$\therefore \angle HAE = \angle EOF = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 $EFGH$ 是菱形,

$$\therefore EH = EF,$$

在 $\text{Rt}\triangle AHE$ 和 $\text{Rt}\triangle OEF$ 中,

$$\begin{cases} AH = EO \\ HE = EF \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AHE \cong \text{Rt}\triangle OEF,$$

$$\therefore \angle AEH = \angle EFO,$$

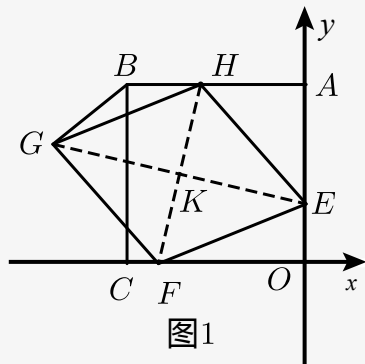
$$\because \angle EFO + \angle FEO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEH + \angle FEO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HEF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是正方形.

(2) 如图1中, 连接 GE 、 FH 交于点 K .



$$\because F(-5,0), E(0,2),$$

$$\therefore OF = 5, OE = 2, EA = 4,$$

$$\therefore HE = EF,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore 5^2 + 2^2 = 4^2 + AH^2, \\
&\therefore AH = \sqrt{13}, \\
&\therefore H(-\sqrt{13}, 6), \\
&\therefore \text{四边形} EFGH \text{是菱形}, \\
&\therefore HK = KF, KE = KG, \text{设} G(m, n), \\
&\text{则有} \frac{m+0}{2} = \frac{-5-\sqrt{13}}{2}, \frac{n+2}{2} = \frac{6+0}{2}, \\
&\therefore m = -5 - \sqrt{13}, n = 4, \\
&\therefore G(-5 - \sqrt{13}, 4).
\end{aligned}$$

(3) 如图2中,

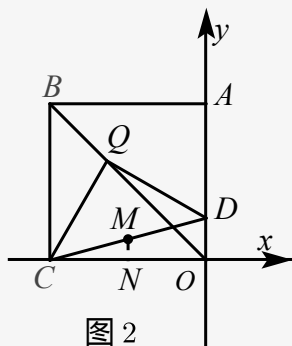


图 2

如图2中, 作 $MN \perp CO$ 于 M .

$$\therefore MN \parallel OD, CM = MD,$$

$$\therefore CN = ON,$$

$\therefore MN$ 垂直平分线段 CO ,

$\therefore$ 点 M 在线段 OC 的垂直平分线上运动,

如图3中, 易知当点 Q 与 B 重合时, 点 M 与 BD 的中点 N 重合,

当 $BQ = 3$ 时, 作 $EQ \perp BC$ 于 E , 延长 EQ 交 OA 于 F , 延长 OM 交 BC 于 H , 连接 NM (线段 MN 的长即为点 M 的运动轨迹的长),

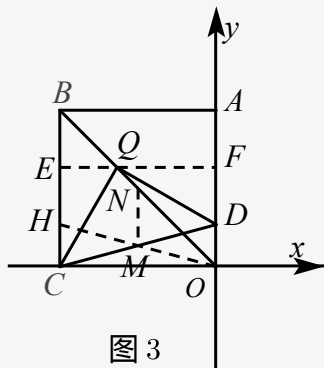


图 3

$$\therefore QC = QD, \angle CEQ = \angle QFD, \text{易证} \angle ECQ = \angle FQD,$$

$$\therefore \triangle EQC \cong \triangle FDQ,$$

$$\therefore EQ = DF = BE = \frac{3\sqrt{2}}{2}, CE = OF = 6 - \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\begin{aligned}
&\therefore DO = 6 - 3\sqrt{2}, \\
&\therefore CM = DM, \angle CMH = \angle OMD, \angle CHM = \angle DOM, \\
&\therefore \triangle HMC \cong \triangle OMD, \\
&\therefore OM = HM, CH = OD = 6 - 3\sqrt{2}, BH = 3\sqrt{2}, \\
&\therefore ON = NB, \\
&\therefore MN = \frac{1}{2}BH = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \\
&\therefore \text{点 } M \text{ 的运动的路径的长为 } \frac{3\sqrt{2}}{2}. \\
&\text{故答案为 } \frac{3\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】动点与特殊平行四边形问题